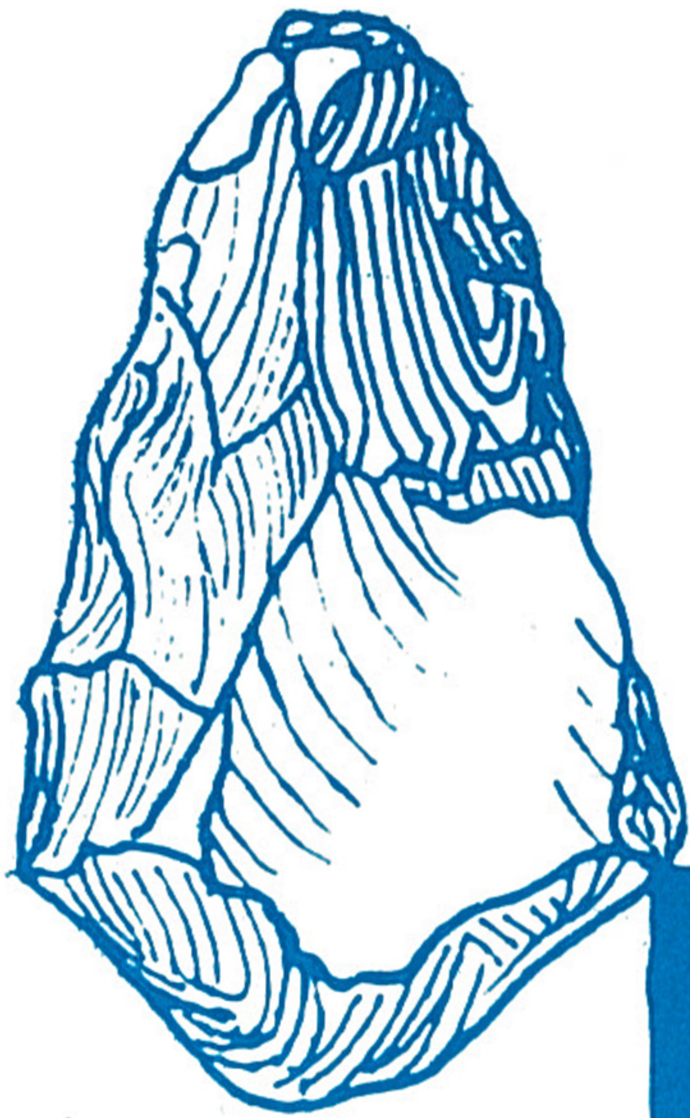
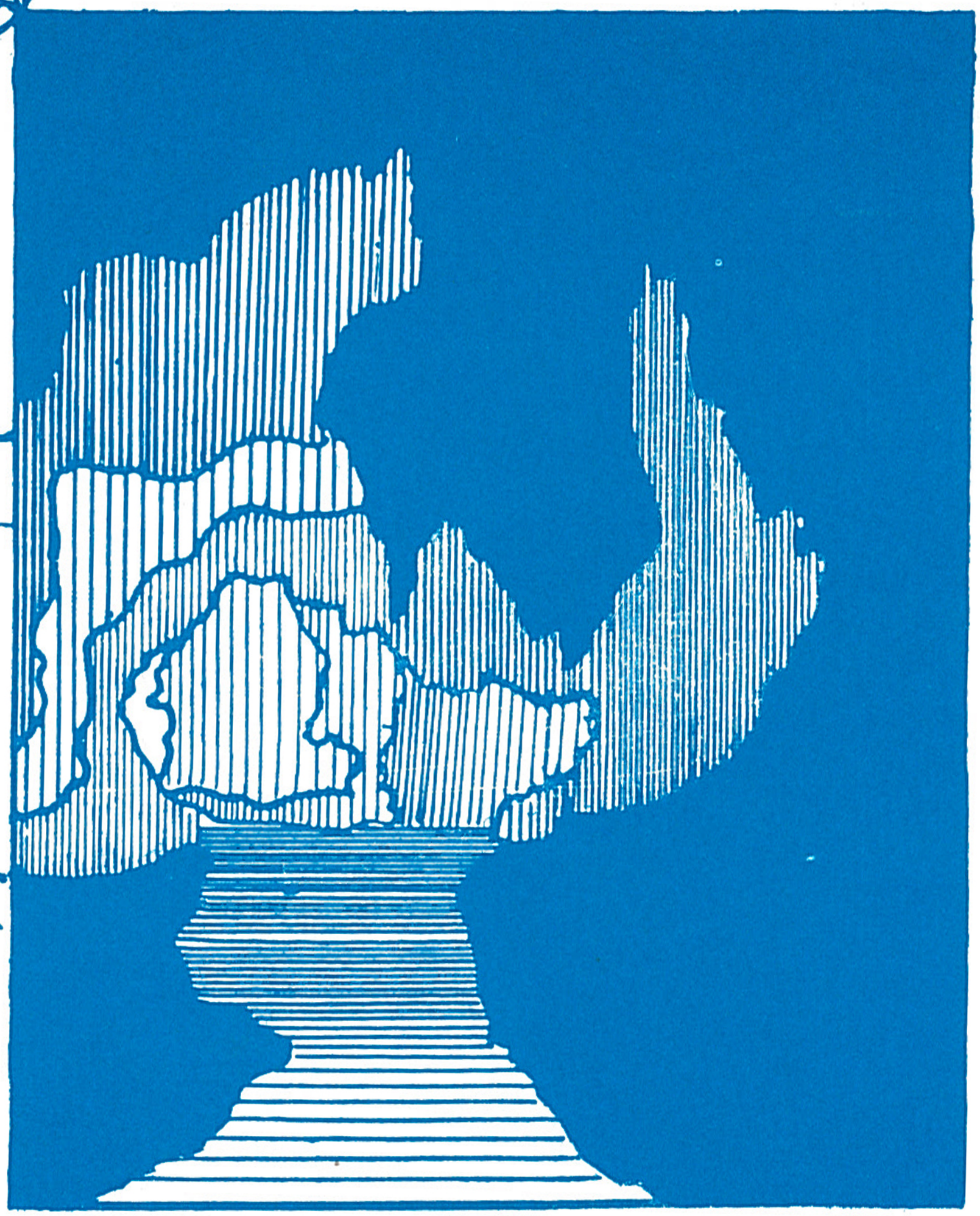
GUIDA DIDATTICA N. 3

Supplemento alle Memorie dello Speleo Club Chieti

VITTORIO CASTELLANI



SFORZI E RESISTENZA DELLE CORDE
CONSIDERAZIONI GENERALI



Chieti 1977

GUIDA DIDATTICA N. 3

Supplemento alle Memorie dello Speleo Club Chieti

VITTORIO CASTELLANI

SFORZI E RESISTENZA DELLE CORDE
CONSIDERAZIONI GENERALI

Pubblicato con il contributo della Regione Abruzzo

Chieti 1977

PREMESSA

Nel seguito viene riesaminato il problema della resistenza delle corde con particolare riguardo alla tipica utilizzazione speleologica, al fine di fornire un testo che consenta di mettere in luce i punti fondamentali dei vari problemi (alcuni dei quali, sovente, trascurati).

In tale linea conviene rinunciare al tentativo di "volgarizzare" gli sviluppi fisico-matematici, fornendo questi nella forma più appropriata come inserti nel corso del testo. La corretta forma matematica è infatti pur sempre la più semplice per chi sia interessato a seguire la trattazione teorica, mentre forme approssimate non servono né a questi né a chi non è interessato, confondendo le idee a tutti.

Usiamo unità di misura nel sistema tecnico, cioè un corpo di 1 Kg di massa pesa 1 Kilogrammo-peso (Kp). Faremo riferimento in generale alle sole corde in fibra sintetica, ormai di uso comune e generalizzato.

Rinunciamo ad esporre elaborati teorici che non diano una chiara risposta, dipendendo da troppi parametri variabili. Negli altri casi ci sforzeremo di dare i corretti ordini di grandezza, senza indulgere in perfezionamenti inessenziali.

Quella esposta é, in generale, una originale rielaborazione dei vari problemi, suggerita da un esame della letteratura esistente alla luce delle considerazioni introduttive. Ove il caso, saranno costantemente citate le fonti di riferimento; sull'argomento esiste - facilmente accessibile - una non vasta letteratura su periodici alpinistici ed, in particolare, sul bollettino mensile del C.A.I. .

SOLLECITAZIONI STATICHE: Resistenza delle corde.

Una corda (come un elastico od una molla) é un sistema in grado di sopportare una trazione agli estremi deformandosi sino a generare una forza di richiamo in grado di annullare le trazioni (fig. 1)

La deformazione non è quindi un fenomeno accessorio, ma è il meccanismo attraverso il quale la corda opera uno sforzo.

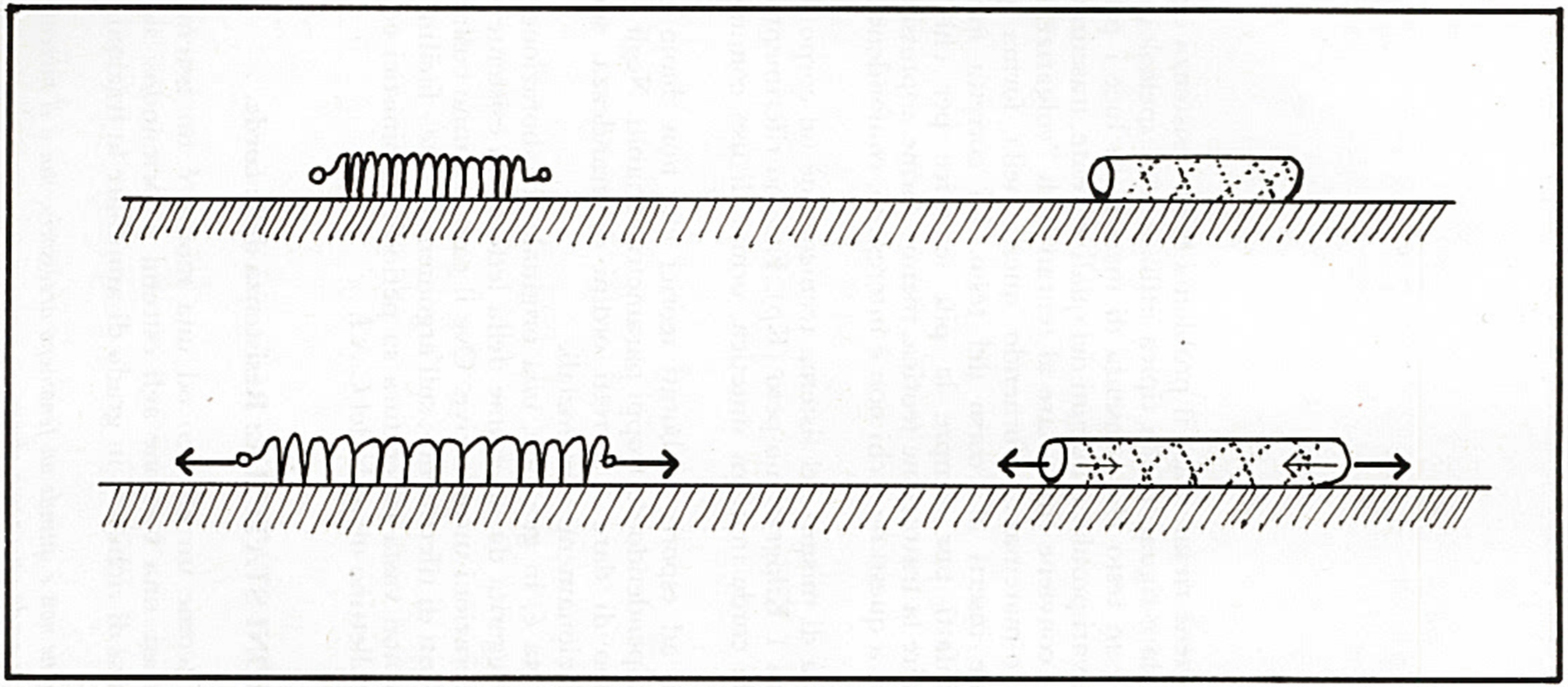


Fig. 1 Una porzione di corda è come una molla o un elastico. Se non è tirata agli estremi ha una lunghezza propria. Applicando due forze eguali e contrarie ai capi della corda essa si allunga generando forze che si oppongono all'allungamento sino a bilanciare le forze esterne. La forza di "richiamo" di una corda dipende dalla sua estensione, cioè dall'allungamento percentuale subito.

Come negli elastici, la forza di richiamo della corda dipende dall'*allungamento percentuale*.

Ogniqualvolta una corda sotto sforzo è in quiete (condizioni statiche) devono essere in qualche modo realizzate le condizioni di fig. 1: gli estremi della corda sono sottoposti a due forze eguali e contrarie che tendono ad estendere la corda e questa si è allungata sino a creare forze interne di richiamo che equilibrano le trazioni.

Per ogni corda esiste un allungamento percentuale massimo (cioè uno sforzo massimo) al di là del quale si superano le forze di coesione della struttura e si ottiene la rottura della corda (carico di rottura).

In prima approssimazione ci si attende che il carico di rottura (F_r) per ogni prefissato materiale e tipo di "tessitura" della corda, risulti proporzionale alla sezione della corda e quindi al quadrato del raggio della corda

$$F_r = A \times \pi R^2$$

dove A è una opportuna costante caratteristica del tipo di corde.

Una giustificazione immediata di tale comportamento è fornita dalla semplice constatazione che occorre intrecciare *quattro* corde di un prefissato diametro per ottenere una corda dal diametro doppio.

In fig. 2 sono riportate le variazioni teoriche del carico di rottura calcolate secondo la formula precedente assumendo diversi valori di A ($A=8$, 16 e 24 Kp/mm^2). Riportando sullo stesso grafico carichi di rottura determinati sperimentalmente (Castellani 1974) si ottengono valori che si dispongono abbastanza bene attorno alla curva $A = 16\ Kp/mm^2$. Solo il campione da 11 mm mostra, per quel che riguarda il carico di rottura, di essere di qualità nettamente inferiore agli altri campioni. In fig. 3 sono riportati valori di carichi di rottura desunti dai listini della ditta C. Cavalieri di Sale Marasino (BS).

Si ottiene nuovamente un buon accordo con gli andamenti previsti teoricamente, con variazioni di A al variare il tipo delle corde, sino a circa il 40% ($16 \leqslant A \leqslant 24$; maggiore A maggiore è, a parità di diametro, il carico di rottura).

SOLLECITAZIONI STATICHE: Elasticità delle corde.

Al di sotto del carico di rottura, lo sforzo F operato da una corda

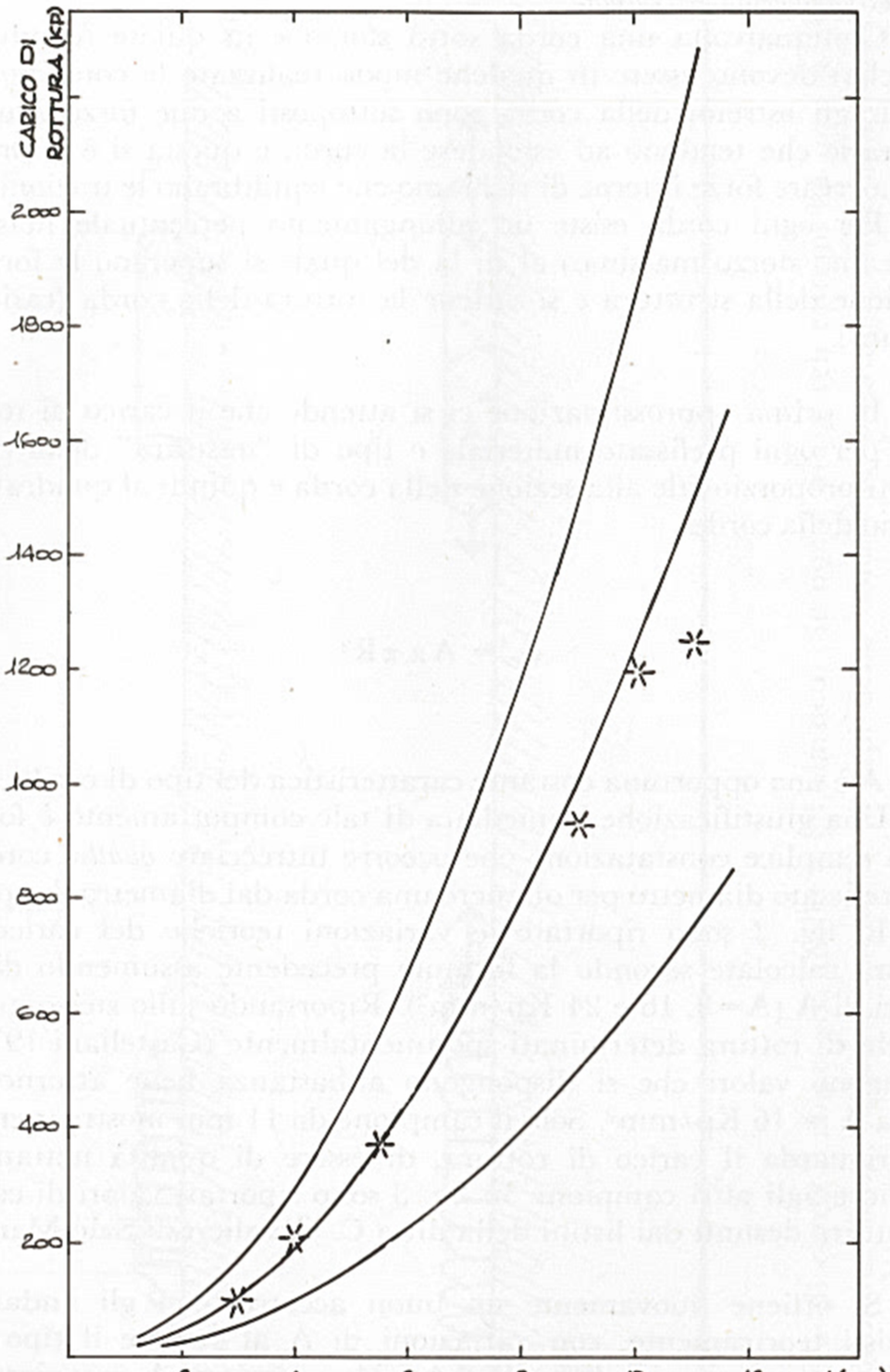


Fig. 2 Per un prefissato tipo di materiale e di struttura il carico di rottura dovrebbe essere proporzionale al quadrato del diametro della corda. Prove sperimentali confermano questa legge (cfr. testo). Diametro delle corde in mm. (d)

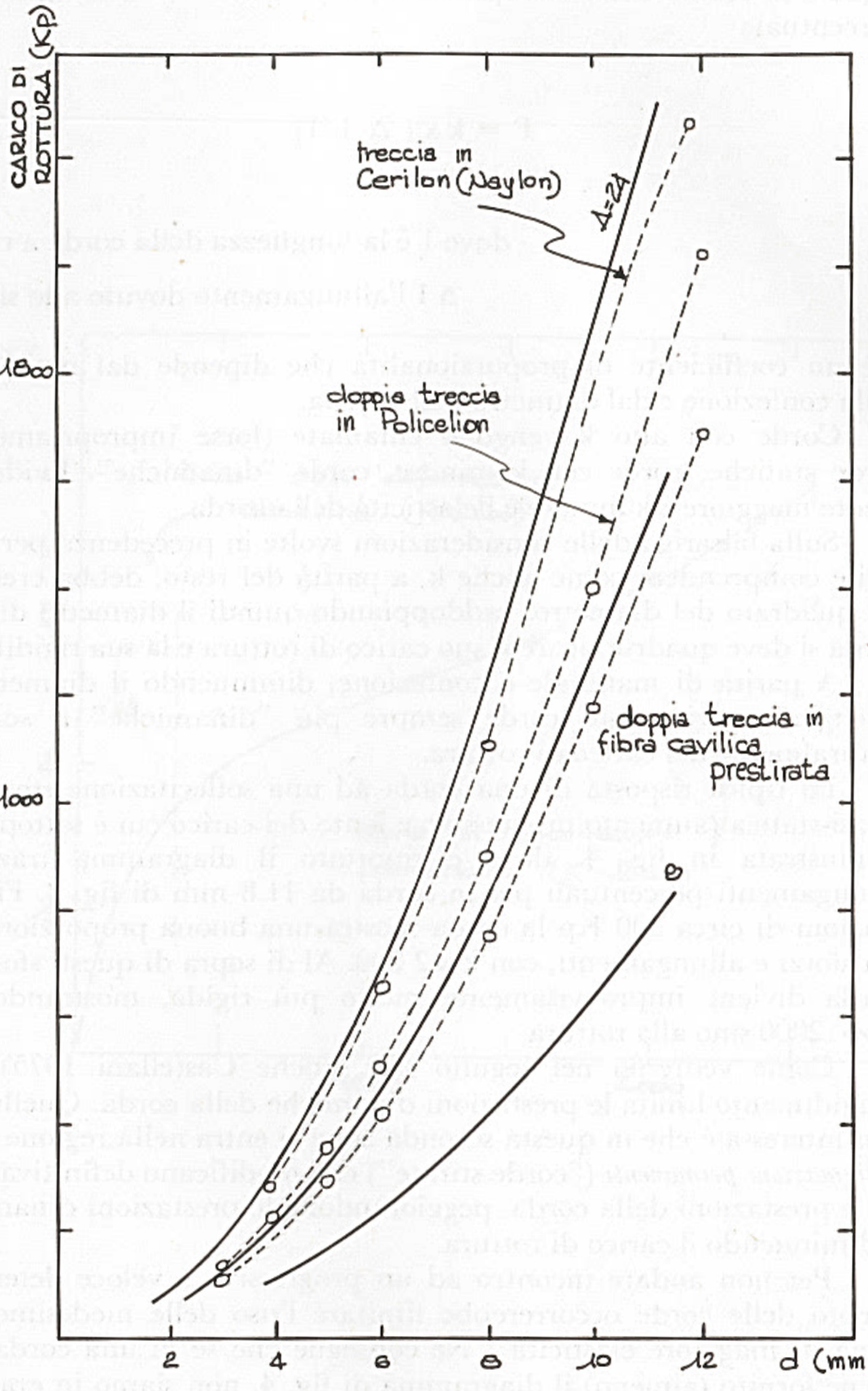


Fig. 3 Carichi di rottura di vari tipi di corde al variare del diametro della corda (d) in mm. È in genere ben verificata la crescita col quadrato del diametro con 16 < A < 24

(eguale al carico cui è sottoposta) è proporzionale all'allungamento percentuale

$$F = k \times (\Delta 1/1)$$

dove 1 è la lunghezza della corda a riposo

Δ 1 l'allungamento dovuto allo sforzo

k è un coefficiente di proporzionalità che dipende dal materiale, dalla confezione e dal diametro della corda.

Corde con alto k vengono chiamate (forse impropriamente) corde statiche, corde con k minore, corde "dinamiche". Evidentemente maggiore è k minore è l'elasticità della corda.

Sulla falsariga delle considerazioni svolte in precedenza per A, è facile comprendere come anche k, a parità del resto, debba crescere col quadrato del diametro; raddoppiando quindi il diametro di una corda si deve quadruplicare il suo carico di rottura e la sua rigidità.

A parità di materiale e confezione, diminuendo il diametro si ottengono ovviamente corde sempre più "dinamiche" a scapito naturalmente del carico di rottura.

La tipica risposta di una corda ad una sollecitazione statica o quasi-statica (aumento progressivo e lento del carico cui è sottoposta) è illustrata in fig. 4, dove è riportato il diagramma trazioni-allungamenti percentuali per la corda da 11.8 mm di fig. 3. Fino a trazioni di circa 500 Kp la corda mostra una buona proporzionalità tra sforzi e allungamenti, con $k \sim 2\,200$. Al di sopra di questi sforzi la corda diviene improvvisamente molto più rigida, mostrando un $K \sim 12000$ sino alla rottura.

Come vedremo nel seguito (cfr. anche Castellani 1975) tale irrigidimento limita le prestazioni dinamiche della corda. Quello che qui interessa è che in questa seconda zona si entra nella regione delle *deformazioni permanenti* ("corde stirate") che modificano definitivamente le prestazioni della corda, peggiorandone le prestazioni dinamiche e diminuendo il carico di rottura.

Per non andare incontro ad un progressivo e veloce deterioramento delle corde occorrerebbe limitare l'uso delle medesime alla zona di maggiore elasticità . Ne consegue che se di una corda non viene fornito (almeno) il diagramma di fig. 4, non siamo in grado di avere una qualche utile indicazione delle sue caratteristiche statiche, non bastando la semplice indicazione del carico di rottura a definire la risposta di una corda ad un uso continuato. Il che dovrebbe convincerci che, molte volte, compriamo ed utilizziamo corde *a scatola chiusa.*

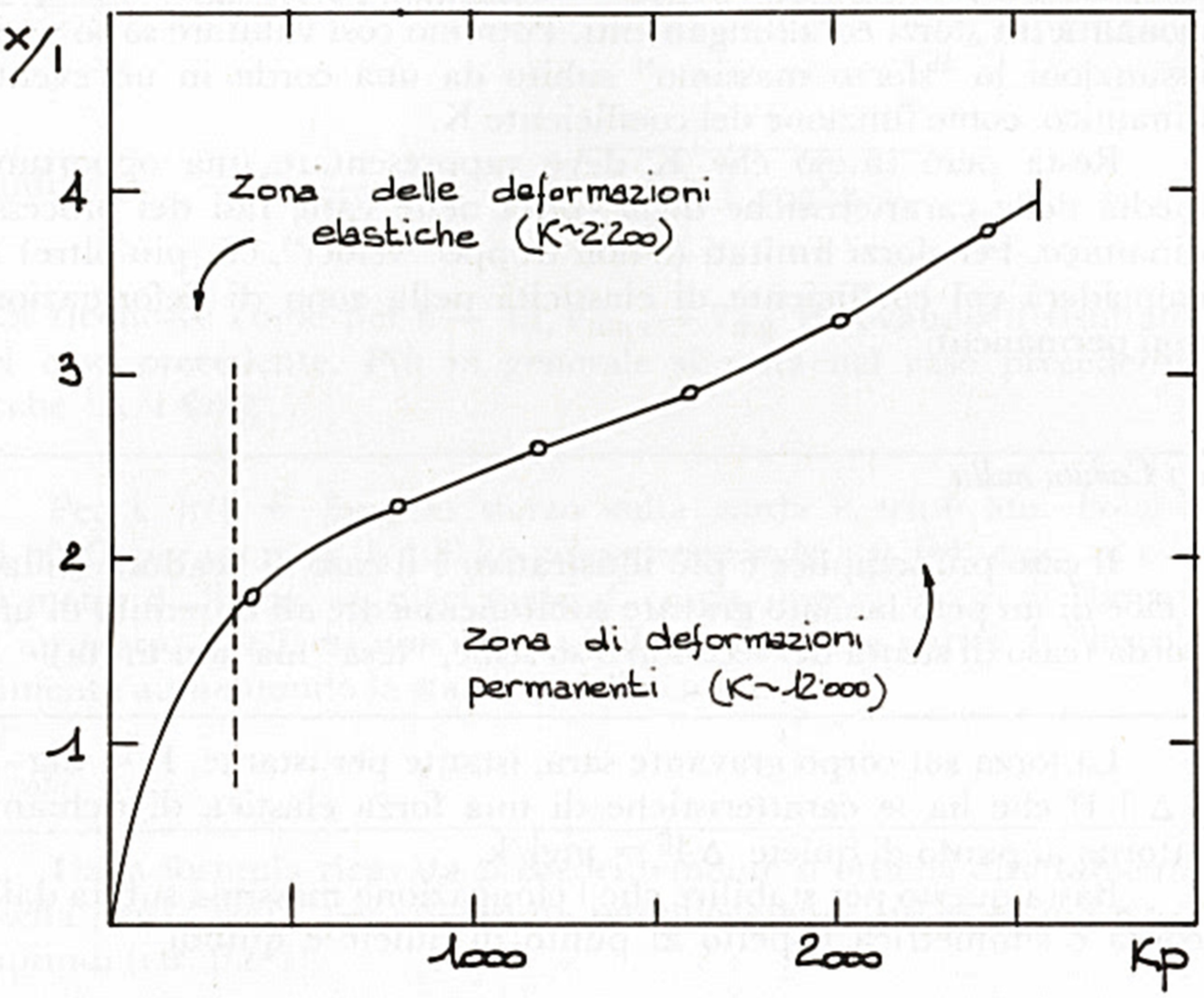


Fig. 4 L'allungamento percentuale di una corda (x = allungamento della corda, l = lunghezza originaria della corda) in funzione del carico in kp. Alla fine della curva è indicato il carico di rottura.

SOLLECITAZIONI DINAMICHE SEMPLICI

È necessario convincersi che le condizioni statiche non sono in pratica mai realizzate e che conseguentemente gli sforzi sostenuti da una corda sono sempre maggiori della forza peso del semplice carico.

La trattazione delle fasi dinamiche deve in generale basarsi sulla valutazione del "lavoro" eseguibile da una corda (cfr. Castellani 1975). Tale approccio, fisicamente corretto, può essere notevolmente semplificato postulando la generale validità di una legge di proporzionalità tra sforzi ed allungamenti. Potremo così valutare sotto varie assunzioni lo "sforzo massimo" subito da una corda in un evento dinamico, come funzione del coefficiente K.

Resta però inteso che K deve rappresentare una opportuna media delle caratteristiche della corda nelle varie fasi del processo dinamico. Per sforzi limitati (e non troppo "veloci", cfr. più oltre) K coinciderà col coefficiente di elasticità nella zona di deformazioni non permanenti.

a) Caduta nulla

Il caso più semplice e più illustrativo è il caso di "caduta nulla", e cioè di un peso lasciato gravare subitaneamente all'estremità di una corda (caso di sicura del secondo o su scale, "tesa" ma non tirata).

La forza sul corpo gravante sarà, istante per istante, $F = mg - k (\Delta l/l)$ che ha le caratteristiche di una forza elastica di richiamo attorno al punto di quiete $\Delta l^{0} = mgl/k$.

Basta questo per stabilire che l'elongazione massima subita dalla corda è simmetrica rispetto al punto di quiete e quindi

$$\Delta l_{max} = 2 \Delta l.$$

Ne segue che nel caso in esame lo sforzo sostenuto dalla corda durante il transiente iniziale *è giusto il doppio del peso gravante, indipendentemente dalla lunghezza della corda.*

b) Piccoli strappi

Lo sforzo subito dalla corda evidentemente aumenta se il peso prima di gravare sulla corda percorre un certo spazio h in caduta libera (sicura lenta o volo da primo).

Essendo mgh l'energia cinetica del grave all'inizio della tensione della corda, il lavoro fatto dalle forze sul grave sino al frenamento totale dovrà risultare

$$\int_0^{\Delta l max} (- mg + kx/l)\, dx = mgh$$

da cui

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{x^2 max}{2} - mg\, xmax - mgh = o \qquad F^2 max - 2mg\, Fmax - \frac{mghk}{l} = o$$

e infine $$Fmax = mg + \sqrt{m^2 g^2 + mghk/l}$$

Si riconosce come per $h \rightarrow O$, $F_{max} \rightarrow 2_{mg}$ ritrovando il risultato del caso precedente. Più in generale si resta nel caso precedente sicchè $hk/l \ll mg$.

Per k h/l = 3mg lo sforzo sulla corda è triplicato. Poichè $k \gg 3000$, per un peso di 100 kp ciò avviene se h/l = 0.1, cioè, ad es., un metro di "lasco" su dieci metri di corda, ovvero 10 cm di "lasco" su un metro. L'effetto non è quindi drammatico: a parità di "lasco" aumenta aumentando la staticità della corda.

c) volo

Dalla formula ricavata precedentemente si ottiene direttamente quella per i "voli", per cui risulta semplicemente $m^2 g^2 \ll mg\, Kh/l$ e quindi (cfr. fig. 5)

$$Fmax = \sqrt{mgkh/l}$$

Si verifica nuovamente come le corde statiche (K grande) debbano sopportare sforzi maggiori. In figg. 6 e 7 sono riportati alcuni grafici esemplificativi dei risultati ottenuti. Dalla relazione si ottiene nel caso particolare di volo da primo su corda bloccata all'estremità inferiore (e quindi h = 2l)

$$Fmax = \sqrt{2\, mgk}$$

indipendente da h, tanto maggiore quanto più la corda è statica (K crescente)

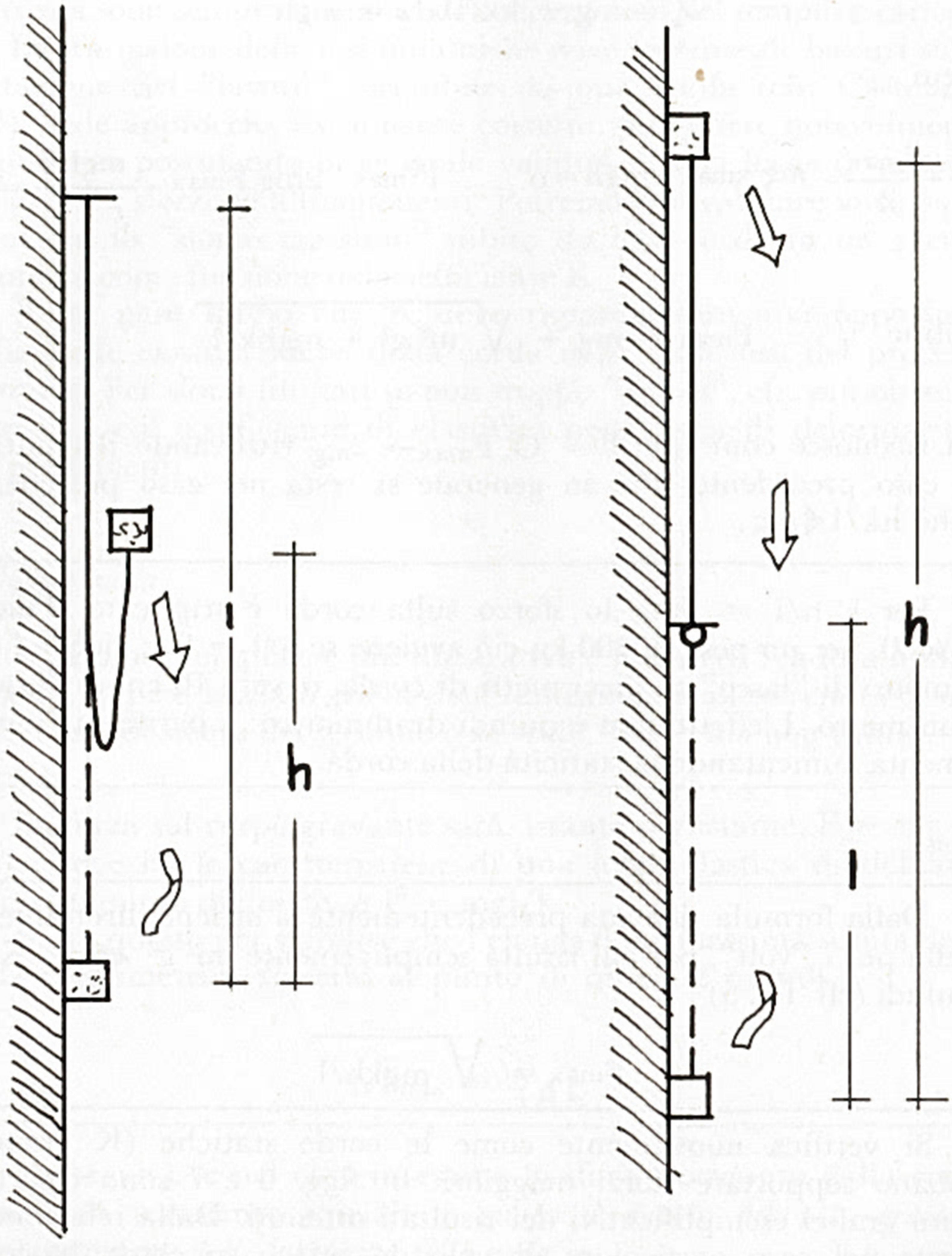


Fig. 5 Lunghezza di volo (h) e lunghezza di corda (l) nel caso di voli. A destra il caso di volo totale h = 2l.

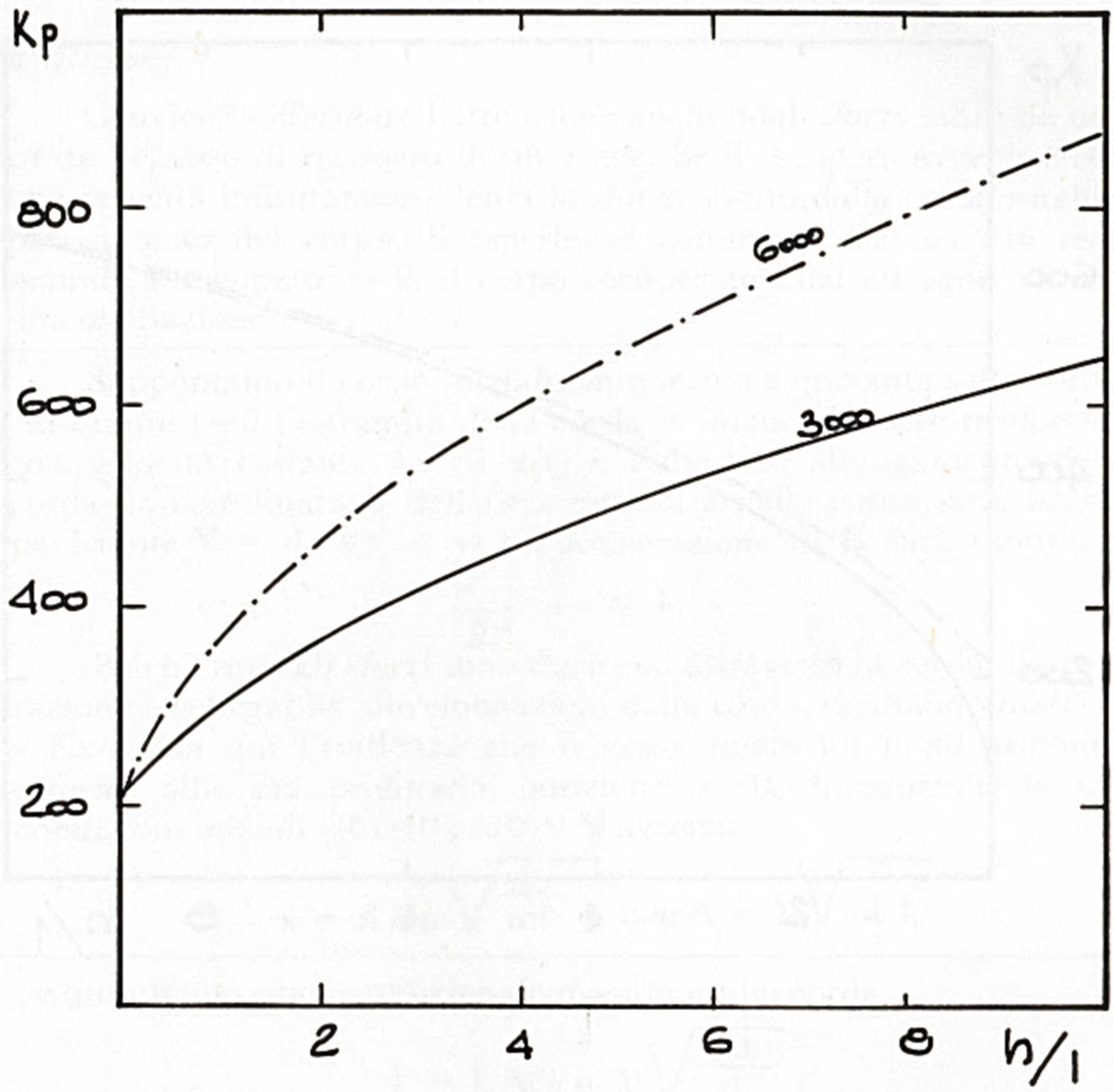


Fig. 6 Sforzo massimo sostenuto su volo da una corda al variare di h/l per due valori dell'elasticità della corda, come indicato dal valore di k riportato sulle curve. La corda più dinamica (K=3 000) subisce uno sforzo sensibilmente minore. Massa di volo 100 Kg.

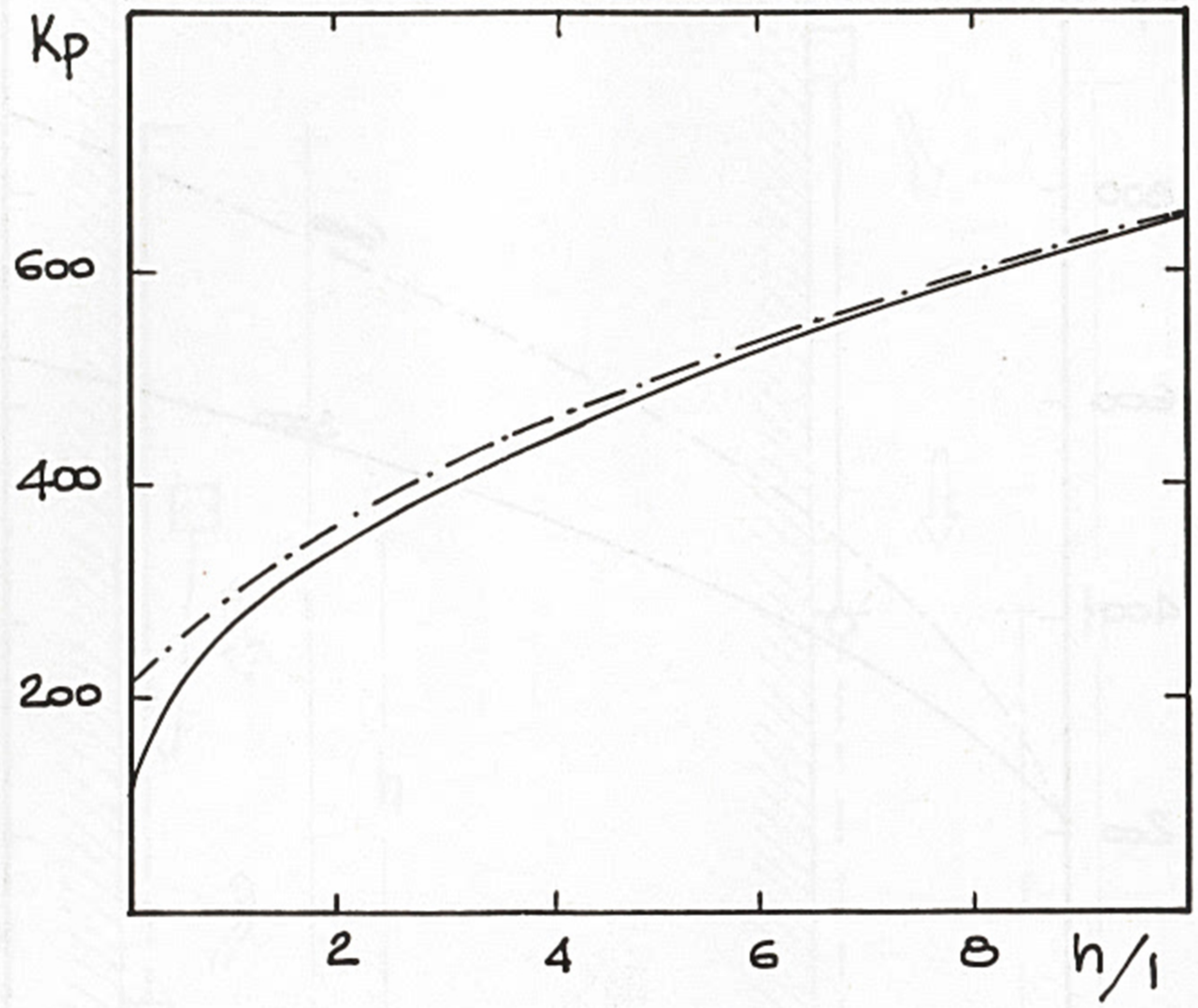


Fig. 7 Confronto tra l'approssimazione di volo (linea continua) ed il calcolo corretto (linea a tratti) nel caso di K= 3000 della figura precedente.

d) Pendolo

Nel caso di pendolo (fig. 8) la velocità massima raggiunta è $\frac{1}{2}$ $mv^2 = mgh = \frac{1}{2} m\omega^2 l^2$ (ω = velocità angolare)

Poichè l'accelerazione centrifuga è $\omega^2 l$ si ha $F = m\,\omega^2 l = 2mgh/l$ cioè si giunge a triplicare lo sforzo per pendolo completo ($h = l$), indipendentemente dal tipo di corda.

d) Recuperi

Conviene soffermare l'attenzione anche sugli sforzi subiti da una corda nel caso di recupero di un grave. Se il recupero avvenisse con una velocità infinitamente lenta lo sforzo subito dalla corda sarebbe pari al peso del corpo. È esperienza comune come nei casi reali quando v recupero = 0, il corpo recuperato inizi ad ogni "tirata" una oscillazione.

Supponiamo il corpo inizialmente fermo e gravante sulla corda. All'istante $t=0$ l'estremità della corda A inizia ad essere recuperata con velocità costante V. Se $x(t)$ è l'ulteriore allungamento della corda, la coordinata Y dell'altra estremità della corda sarà, istante per istante $Y = -l - x(t) + vt$ e l'accelerazione di B sarà quindi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\ddot{x}(t)$$

Poichè tutti gli sforzi sono trasmessi attraverso la corda, l'accelerazione è collegabile alle elongazioni della corda, risultando $m\ddot{x}(t) = -Kx/l$. Da qui l'evidenza che il grave inizia un moto armonico attorno alla sua originaria posizione $x=0$. Imponendo le due condizioni iniziali $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=V$ avremo

$$x = A \sin \sqrt{\frac{k}{ml}}\,.\,t \qquad \text{con } A = V\sqrt{ml/k}$$

e quindi uno sforzo addizionale massimo sulla corda

$$F = kA/l = V\sqrt{\frac{mk}{l}}$$

decrescente al crescere di l e, di nuovo, tanto maggiore quanto maggiore K.

In pratica poichè la sollecitazione su A non dura un tempo infinito, il moto inizierà come una oscillazione sinusoidale, ma alla fine della sollecitazione sarà ulteriormente modificato. Se il massimo della oscillazione non è ancora raggiunto gli effetti tenderanno ad essere smorzati. Ma se il tiro viene ripetuto ad intervalli regolari che corrispondano al periodo proprio del sistema si hanno *oscillazioni di risonanza che crescono rapidamente e infinitamente;* in tal caso si può in breve tempo giungere a sovraccarichi elevatissimi con disastrose conseguenze.

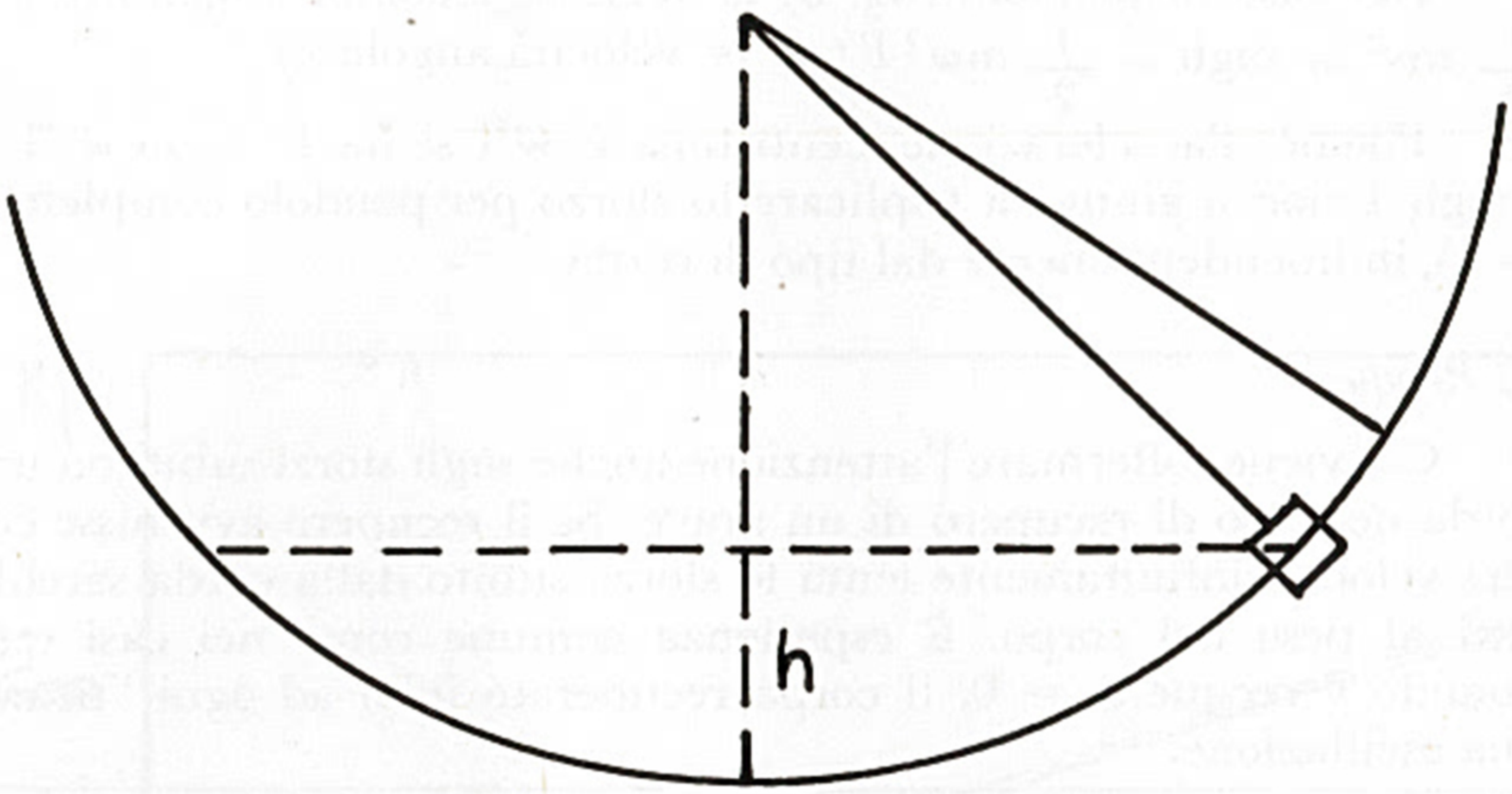


Fig. 8 Definizione dei parametri in caso di pendolo. l = lunghezza della corda, h = "altezza" del pendolo.

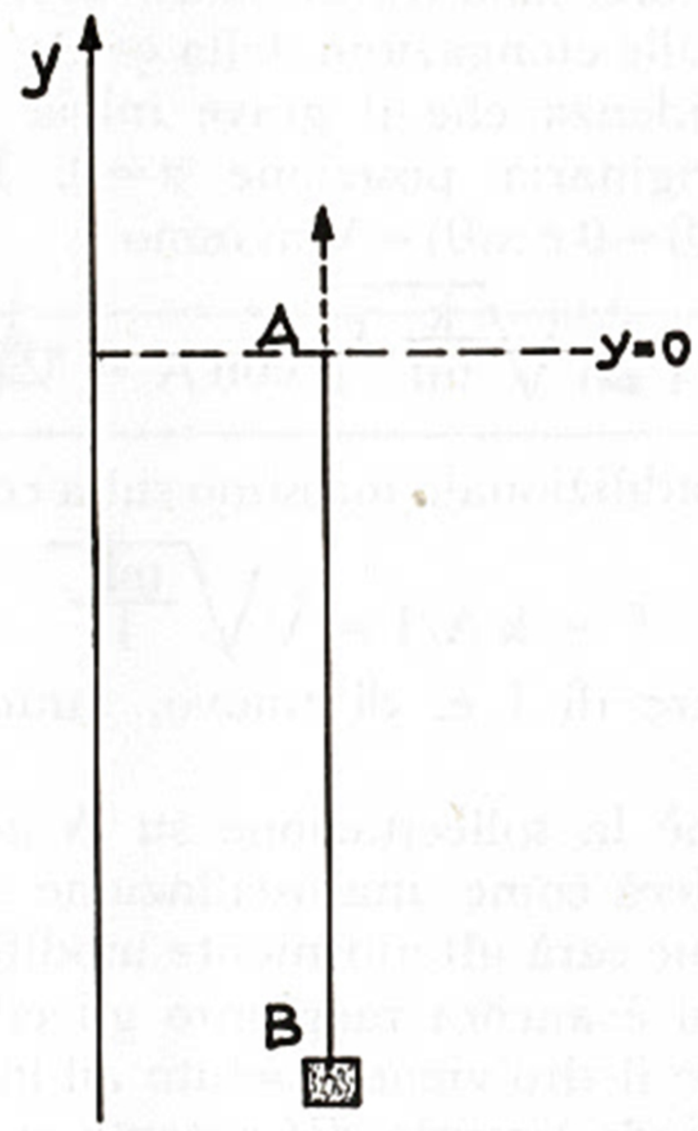


Fig. 9 Definizione dei parametri in casi di recuperi. A = capo della corda sottoposto a trazione, B = estremità a cui è assicurato il carico.

Si noti che aumentando k (anche se può sembrare confortante che diminuisca l'ampiezza delle oscillazioni) non solo aumenta lo sforzo massimo A, ma diminuisce anche il periodo, e lo sforzo massimo può più facilmente essere raggiunto durante il tiro. Analogamente al diminuire di 1, così che lo sforzo massimo viene raggiunto a carico quasi recuperato, fase nella quale è quindi necessario moderare la velocità del recupero (cosa in genere prodotta spontaneamente dalle circostanze) per evitare pericolosi sovraccarichi alla corda.

DINAMICA

Nelle sezioni precedenti abbiamo ricavato quale lo sforzo massimo sopportato da una corda sotto diversi tipi di sollecitazioni. Nella grande maggioranza dei casi si è trovato che lo sforzo è proporzionale a k cioè alla radice della costante di rigidità della corda; maggiore è k più "rigida" è la corda e più alto lo sforzo che essa deve sostenere in casi dinamici.

Il modo più banale per diminuire k (aumentare l'elasticità) sarebbe evidentemente quello di diminuire il diametro della corda, come in precedenza accennato, risultando k proporzionale al quadrato del diametro della corda. Diminuendo il diametro della corda si ha quindi

$$F_{max} \propto \sqrt{k} \propto r$$

$$F_r \propto r^2$$

da cui si vede come F_{max}/F_r sia proporzionale a 1/r:diminuendo il diametro d della corda *aumenta* lo sforzo sostenuto rispetto allo sforzo massimo di rottura, cioè - come intuitivo - le corde sottili "reggono" di meno. In fig. 10 sono riportati i diagrammi sperimentali (3/12/1974) per tre corde di diverso diametro. La linea continua indica l'andamento dello sforzo massimo sulle corde a parità di altre condizioni.

RIGIDITA' EFFICACE

Il completo comportamento dinamico è determinato, sulla base dei risultati suesposti, dalla constatazione che il coefficiente k *è funzione della velocità stessa di allungamento della corda* (cfr. Zanantoni 1968). Aumentando la velocità di allungamento la corda tende a

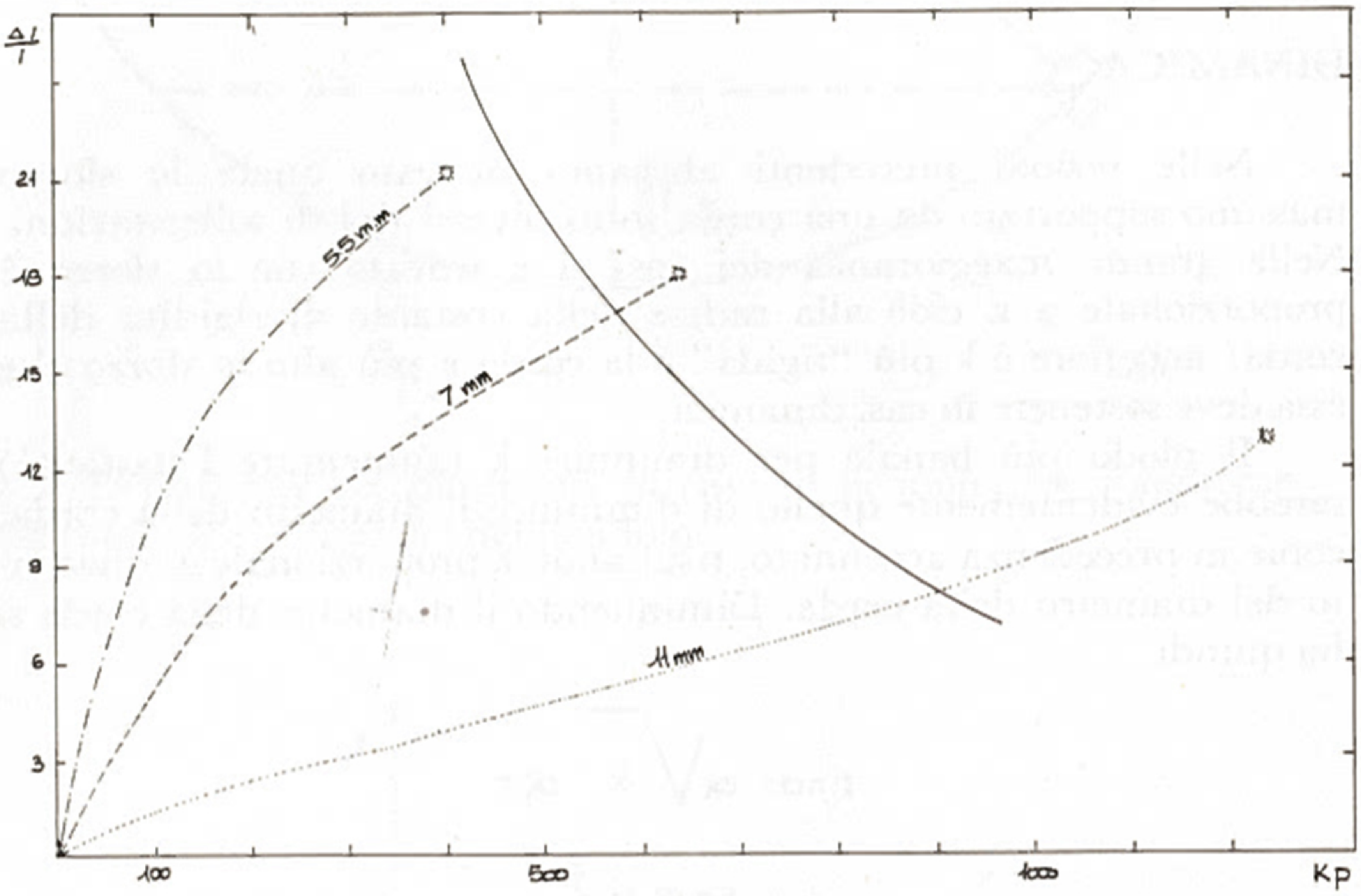


Fig. 10 Diagrammi sperimentali sforzi - allungamenti e carichi di rottura (stelle) per tre corde di diverso diametro. La linea continua indica la variazione dello sforzo massimo sostenuto dalle varie corde a parità di condizioni di carico e di volo, così come calcolate in base alla rigidità delle diverse corde.

divenire sempre più rigida, cioè finisce col sopportare carichi sempre più elevati di quelli calcolati in base al comportamento statico. Il k effettivo (k eff) può così giungere quasi a raddoppiare per forti velocità di allungamento.

Per valutare la "risposta" di una corda ad uno strappo occorre quindi conoscere anche la velocità di allungamento della corda.

Una grave che cada da un'altezza h ha una velocità massima (velocità nel vuoto) $v = \sqrt{2gh}$

Poichè la corda inizia ad estendersi con la velocità di caduta, si ha

$$\frac{d}{dt} \Delta l = \sqrt{2gh} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$$

Nel caso di volo completo $h = 2l$ e quindi

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\Delta l}{l} = 2\sqrt{g/l}$$

Cioè la velocità iniziale di allungamento unitario è tanto più piccola quanto maggiore è la caduta-. Questo spiega perchè voli piccoli possano essere *molto più pericolosi*per la corda di voli lunghi. In Fig. 11 è riportato un grafico della velocità iniziale di estensione della corda nel caso di volo completo al variare di l. Si vede che voli inferiori o dell'ordine del metro richiedono prestazioni eccezionali alla corda. Non è difficile estendere le precedenti considerazioni ai più svariati tipi di voli.

CORDE STATICHE E CORDE DINAMICHE.

È invalso l'uso di definire "corde statiche" le corde con alto k, e molto si discute sull'uso di corde statiche in speleologia. Abbiamo visto in precedenza che lo sforzo dinamico sostenuto da una corda è proporzionale a k e che in qualche maniera una corda è sempre soggetta ad eventi dinamici.

Se l'unica differenza tra due corde è il valore di k (e non ad esempio particolari comportamenti di k con la velocità di estensione etc) e se il carico di rottura della corda statica è adeguatamente più elevato $(F_{stat}/F_{din}) \sim \sqrt{(K_{stat}/K_{din})}$

non ci sono differenze, riguardo alla sicurezza, tra le due corde, e la scelta è una questione di opinioni o di gusti (si ricordi in ogni modo che più statica è la corda maggiore è lo sforzo subito e quindi trasmesso al corpo ed agli ancoraggi.)

Se, come spesso implicitamente si ammette, il carico di rottura è circa lo stesso per le due corde, allora la corda "statica" è semplicemente una corda "peggiore". Questo evidentemente è detto in senso relativo: ognuno è in grado di valutare in base a quanto sinora

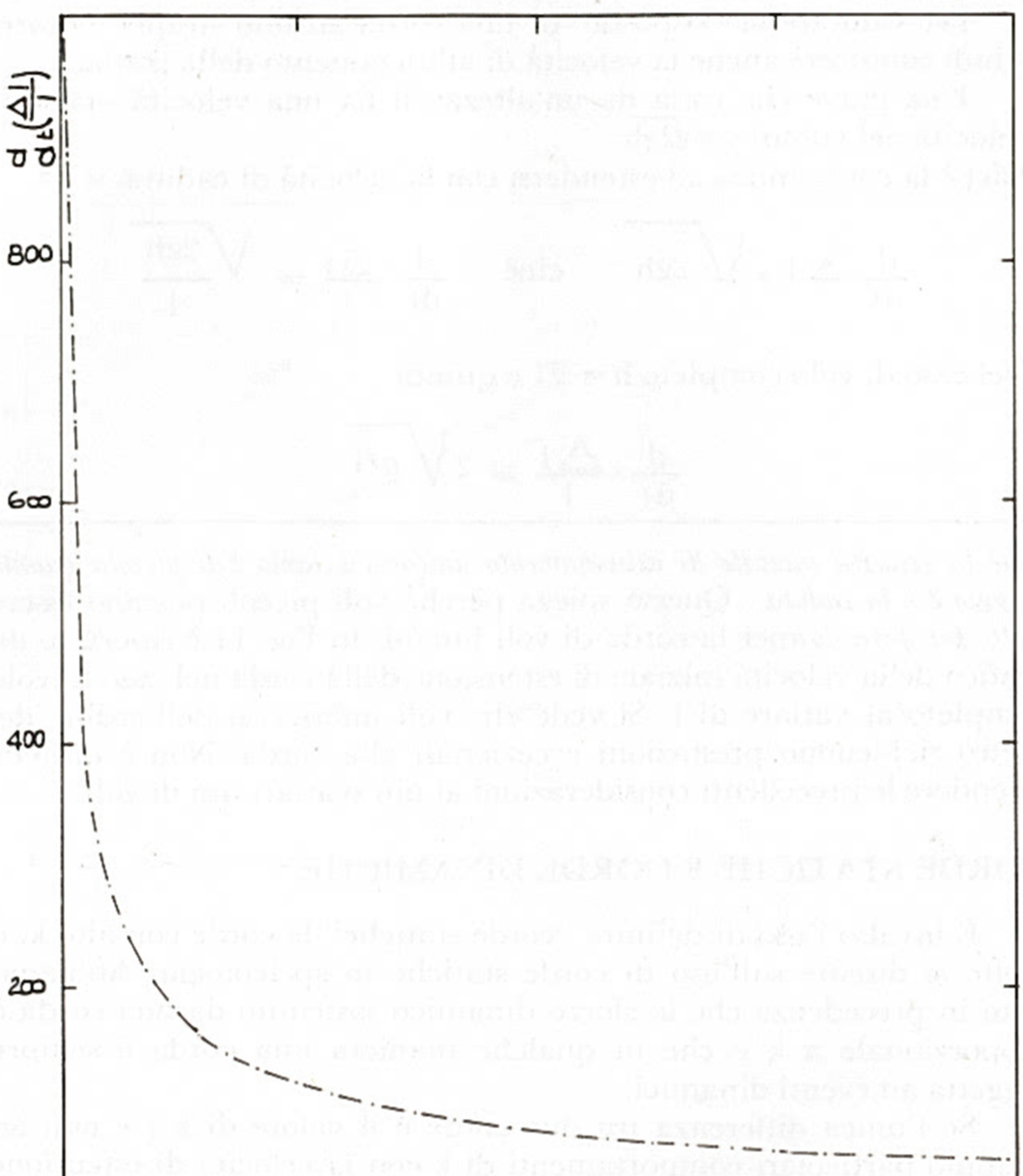


Fig. 11 La velocità percentuale di allungamento all'inizio del frenamento di un volo completo, al variare della lunghezza della corda interessata (l).
Il tempo t è in minuti, l in metri.

indicato, il grado di affidabilità di una corda.

Si ricordi in ogni modo che tensioni dell'ordine di 300 Kp devono essere considerate all'ordine del giorno in ogni uso di corde (anche se non ce ne accorgiamo) e che quindi è molto importante usare corde che abbiano il limite di deformabilità permanente al di là di questo valore. In caso contrario ogni volta che usiamo una corda la "carichiamo" verso la rottura, e le caratteristiche della corda si deterioreranno rapidamente nel tempo. Va da se che più statica è una corda maggiori sono gli sforzi cui è sottoposta e più elevato dovrebbe essere il limite di elasticità permanente.

Riassumento, per poter valutare il comportamento di una corda (nuova) i fabbricanti dovrebbero almeno fornire

a) Diagrammi sforzi allungamenti per diverse velocità

b) Carichi di rottura.

In mancanza di questo sarebbe almeno augurabile ottenere

a) carico di rottura statico

b) carico di deformazione statico

c) coefficiente di elasticità statico

Valutando nei casi dinamici $k \sim 2\ k\ st\hat{a}t$ si potrebbe in qualche modo, pur se rozzamente, prevedere il comportamento della corda. Senza questi dati non ha senso parlare di corde buone e cattive.

NODI

Le corde sono utilizzate per mezzo di nodi. È convinzione diffusa che il nodo rappresenti il punto debole della corda. Questo è da ritenersi vero ma solo entro certi limiti (cfr. Castellani 1975). Nelle esperienze (quasi statiche) sinora da noi compiute si è sempre studiato il comportamento di corde ancorate con nodi (guida). Questo per avere una risposta sul comportamento complessivo corda-nodo. Frequentemente la corda non si è rotta al nodo, il che implica - almeno nelle condizioni sperimentate - che il nodo non costituiva un particolare punto di indebolimento; o meglio che l'indebolimento prodotto dal nodo non superava le fluttuazioni nella resistenza della corda stessa. (Si ricordi che per le fettucce il nodo, se fatto sconsideratamente, può essere esiziale)

Ne segue, abbastanza curiosamente, che le prestazioni di una corda che non soffra nei nodi, potrebbero essere addirittura migliori.

Infatti in caso di volo o strappo l'energia del corpo verrebbe in parte assorbità come energia per allungare la corda ed in parte *come energia per stringere i nodi.*

In fig. 12 è riportato un esempio caratteristico. Al punto 1 il nodo comincia a cedere (cioè a stringersi) e rilascia la tensione della corda. Segue una serie di cedimenti sinchè la corda ricomincia ad allungarsi. Si nota che ormai si è deformata permanentemente e il coefficiente di allungamento è variato.

Attorno ai 1000 Kp finalmente si spezza. Senza nodi il lavoro fatto sarebbe quello dell'area tratteggiata. Con i nodi il lavoro realizzato è l'area sottesa dall'intera curva, il che mostra che il lavoro di serramento dei nodi è stato almeno pari a quello di allungamento...

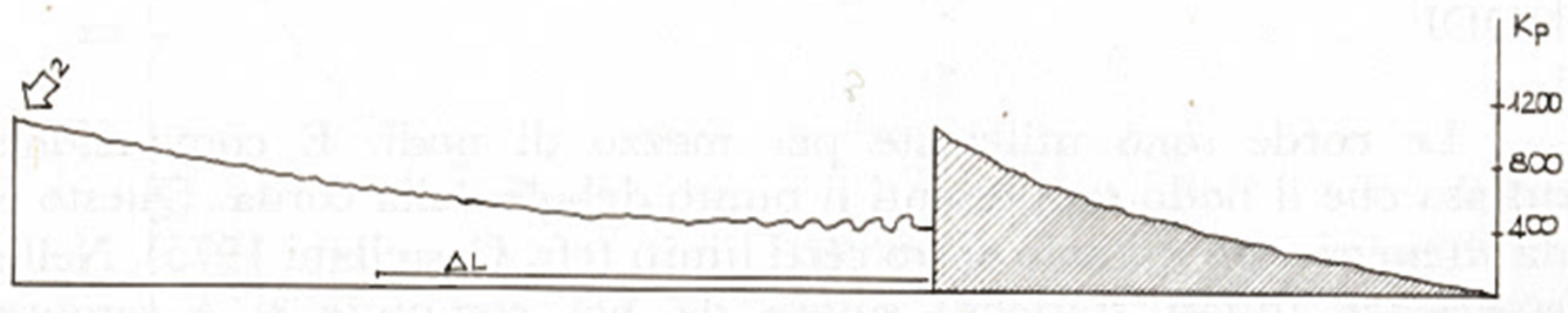


Fig. 12 Diagramma sperimentale sforzi allungamenti in uno spezzone di corda con due nodi. Nella fase 1 inizia lo scorrimento dei nodi. Il punto 2 indica la rottura.

Bibliografia

Castellani V. 1974, Notiziario SSI 5,33
Castellani V. 1975, Notiziario SSI 6,91
Zanantoni C. 1968, Rivista Mensile CAI 89, 413

Stabilimento litotipografico GRAN SASSO
S.S. 80 km 3,800 - Pettino - L'Aquila - Tel. 27841-61222